3.7 Image de l'exponentielle matricielle (155, 204) [29]

Pour terminer cet énorme pdf de développements, on utilise des outils d'analyse et de topologie (inversion locale, connexité) pour montrer que l'exponentielle matricielle est surjective sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et a pour image l'ensemble des carrés des matrices inversibles sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Cela rentre pile pour combler mon couplage, et je trouve la preuve plus élégante qu'avec Dunford et le logarithme (même si c'est une belle preuve également !)

Théorème 3.23. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\exp\left(\mathbb{C}[A]\right) = \mathbb{C}[A]^\times.$$

En particulier :

$$\exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\right) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \exp\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right) = \left\{M^2,\ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}.$$

Démonstration. **Étape 1 :** $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$

Si $B \in \mathbb{C}[A]^\times$, alors bien évidemment, $B \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Réciproquement, si $B \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors 0 n'est pas valeur propre de B et donc le coefficient constant de π_B, polynôme minimal de B est non-nul. En notant :

$$\pi_B =: X^r + \sum_{i=0}^{r-1} a_i X^i,$$

on a :

$$-a_0 I_n = B\left(B^{r-1} + \sum_{i=0}^{r-2} a_{i+1} B^i\right).$$

Ainsi :

$$B^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(B^{r-1} + \sum_{i=0}^{r-2} a_{i+1} B^i\right) \in \mathbb{C}[B] \subset \mathbb{C}[A]$$

car $B \in \mathbb{C}[A]$. Ainsi, $B \in \mathbb{C}[A]^\times$.

Étape 2 : $\exp(\mathbb{C}[A])$ **est un ouvert, fermé, non vide de** $\mathbb{C}[A]^\times$

On veut montrer ce fait car la première étape a permis de montrer en outre que $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe comme intersection du sous-espace vectoriel $\mathbb{C}[A]$ (qui est donc connexe) et du connexe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

— $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$. En effet, si $B \in \mathbb{C}[A]$, alors $\exp(B)$ est un polynôme en B par fermeture du sous-espace vectoriel $\mathbb{C}[B]$ (car de dimension finie). Ainsi, puisque B est un polynôme en A, $\exp(B)$ est un polynôme en A, et c'est bien évidemment une matrice inversible, d'inverse $\exp(-B)$. Ainsi, $\exp(B) \in \mathbb{C}[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A]^\times$.

— $\exp(\mathbb{C}[A])$ est non-vide : la matrice nulle $\mathbf{O}_n$ est un polynôme en A et $I_n = \exp(\mathbf{O}_n)$, ainsi, $I_n \in \exp(\mathbb{C}[A])$.

— $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert : plaçons-nous d'abord en I_n. On sait que :

$$\mathrm{d}\exp_{\mathbf{O}_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{C}[A]} \in \mathrm{GL}\left(\mathbb{C}[A]\right).$$

Ainsi, par le théorème d'inversion locale, il existe des voisinages ouverts $U \in \mathscr{V}_{\mathbb{C}[A]}(\mathbf{O}_n)$, $V \in \mathscr{V}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}(I_n)$ tel que exp réalise un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme de U sur V, de sorte que V soit un ouvert contenant I_n et inclus dans $\exp(\mathbb{C}[A])$. Maintenant, si $M = \exp(N) \in \mathbb{C}[A]$, alors, si on note :

$$\begin{array}{rcrcl} \tau_M & : & \mathbb{C}[A]^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}[A]^\times \\ & & B & \longmapsto & MB \end{array}$$

alors τ_M est un difféomorphisme, de sorte que $\tau_M(V)$ soit un ouvert de $\mathbb{C}[A]^\times$ contenant M et inclus dans $\exp(\mathbb{C}[A])$ étant donné que pour tout $B \in V$, B s'écrit $\exp(B')$ et donc $MB = \exp(N+B')$ car $N, B' \in \mathbb{C}[A]$ donc commutent et donc $MB \in \exp(\mathbb{C}[A])$. Ainsi, $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert. (d'ailleurs, puisque toute les matrices de $\mathbb{C}[A]$ commutent entre elles, on a en fait que exp réalise un morphisme entre les groupes $(\mathbb{C}[A], +)$ et $(\mathbb{C}[A]^\times, \times)$.)

— $\exp(\mathbb{C}[A])$ est fermé. On montre que son complémentaire est ouvert en remarquant, étant donné que $\exp(\mathbb{C}[A])$ est un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}[A]^\times$ (par propriété de morphisme), que $M \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ si et seulement s'il existe $N \in \mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ tel que $MN^{-1} \in \exp(\mathbb{C}[A])$. En effet, si $M \notin \exp(\mathbb{C}[A])$, alors $M^{-1} \notin \exp(\mathbb{C}[A])$ et donc $MM^{-1} = I_n \in \exp(\mathbb{C}[A])$. On prouve la réciproque par contraposée : si $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, alors pour tout $N \notin \exp(\mathbb{C}[A])$, $MN^{-1} \notin \exp(\mathbb{C}[A])$, car, dans le cas contraire, on aurait $N = \underbrace{(MN^{-1})^{-1}}_{\in\exp(\mathbb{C}[A])} \underbrace{M}_{\in\exp(\mathbb{C}[A])} \in \exp(\mathbb{C}[A])$! ! On a donc montré le fait suivant :

$$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A]) = \bigcup_{N\in\mathbb{C}[A]^\times\setminus\exp(\mathbb{C}[A])} N\exp(\mathbb{C}[A]),$$

qui est une union d'ouverts, donc est un ouvert.

On a donc, par connexité de $\mathbb{C}[A]^\times$, que $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$!

Étape 3 : Conclusion

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors en particulier, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}[A]^\times = \exp(\mathbb{C}[A])$. Ainsi, il existe $B \in \mathbb{C}[A]$ tel que $A = \exp(B)$! Ainsi :

$$\exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{C})) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}).$$

Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\exp(B) = \left(\exp\left(\frac{B}{2}\right)\right)^2 \in \left\{M^2,\ M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$. Réciproquement, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$. En conjuguant cette relation, on a :

$$M = \exp\left(\overline{P}(M)\right)$$

et donc :

$$M^2 = \exp\big(\underbrace{P(M) + \overline{P}(M)}_{\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}\big) \in \exp(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})),$$

ce qui conclut cette démonstration ! ! □

Remarque 3.7.1 (Comment on prouve que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe déjà ?)**.** *Soient $M, N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Regardons la fonction suivante, définie sur $\mathbb{C}$:*

$$z \longmapsto \det(zM + (1-z)N).$$

Cette fonction est une fonction polynômiale non-nulle car non-nulle en 0 et en 1. Ainsi, elle s'annule sur un ensemble fini. Notons-le Z. Étant donné que cet ensemble est fini, $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs (en fait on peut relier deux points de cet ensemble en au plus deux segments, faire un dessin, c'est du principe des tiroirs !) et donc il existe un chemin γ incrit dans $\mathbb{C} \setminus Z$ reliant 0 et 1 par exemple, de sorte que le chemin :

$$\begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & \gamma(t)M + (1-\gamma(t))N \end{array}$$

est inscrit dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *et relie* N *à* M *!*